Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Jueves 12 de noviembre de 2015 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.

8815 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 4]

A y B son dos sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}48$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}818$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A \cap B)$. [2]

(b) A partir de lo anterior, muestre que los sucesos A y B son independientes. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Puntuación máxima: 4]

Los tres planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y - z = 11$, $x + 2y + z = 3$ y $5x - y - z = 10$ se cortan en el punto P. Halle las coordenadas de P.

3. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente tabla muestra los datos de los goles que han marcado los jugadores de un equipo de fútbol a lo largo de una temporada.

Goles	**Frecuencia**
0	4
1	k
2	3
3	2
4	3
8	1

(a) Sabiendo que la media de goles marcados por jugador es igual a $1,95$, halle el valor de k. [3]

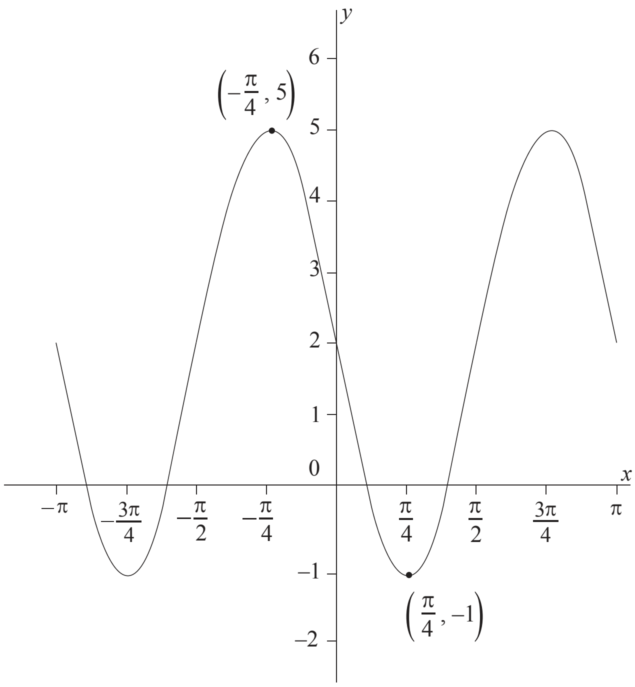
Ahora descubren que ha habido un error en los datos, pues no han incluido en la tabla al máximo anotador, que marcó 22 goles.

(b) (i) Halle el valor correcto de la media de goles marcados por jugador.

(ii) Halle el valor correcto de la desviación típica del número de goles marcados por jugador. [3]

4. [Puntuación máxima: 6]

Una función viene dada por $f(x) = A\,\text{sen}(Bx) + C$, $-\pi \le x \le \pi$, donde $A, B, C \in \mathbb{Z}$. En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Halle el valor de

(i) A;

(ii) B;

(iii) C. [4]

(b) Resuelva $f(x) = 3$, para $0 \le x \le \pi$. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

Una función viene dada por $f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$. La región R está delimitada por $y = f(x)$, el eje y, y la recta $y = 4$.

(a) (i) Exprese el área de la región R como una integral con respecto a y.

(ii) Determine el área de R con una aproximación de cuatro cifras significativas. [3]

(b) Halle el volumen exacto que se genera cuando la región R se rota 2π radianes alrededor del eje y. [3]

6. [Puntuación máxima: 6]

Josie tiene tres formas de ir al colegio. Un 30% de las veces va en coche, un 20% de las veces va en bicicleta y un 50% de las veces va andando.
Cuando va en coche, Josie llega tarde el 5% de las veces. Cuando va en bicicleta, llega tarde el 10% de las veces. Cuando va andando, llega tarde el 25% de las veces.
Sabiendo que llegó a la hora, halle la probabilidad de que haya ido en bicicleta.

7. [Puntuación máxima: 6]

El triángulo ABC tiene un área de $21\,\mathrm{cm}^2$. Los lados AB y AC tienen una longitud de $6\,\mathrm{cm}$ y $11\,\mathrm{cm}$, respectivamente. Halle los dos posibles valores de la longitud del lado BC.

8. [Puntuación máxima: 6]

La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución de probabilidad $f(x) = A\,\mathrm{sen}\left(\ln(x)\right)$, $1 \leq x \leq 5$.

(a) Halle el valor de A con una aproximación de tres cifras decimales. [2]

(b) Halle la moda de X. [2]

(c) Halle el valor $\mathrm{P}(X \leq 3 \mid X \geq 2)$. [2]

9. [Puntuación máxima: 8]

Una partícula se puede mover a lo largo de una línea recta partiendo de un punto O.
La velocidad v, en m s^{-1}, viene dada por la función $v(t) = 1 - \text{e}^{-\text{sen}\, t^2}$ donde el tiempo $t \ge 0$ se mide en segundos.

(a) Escriba los dos primeros instantes $t_1, t_2 > 0$ en los que la partícula cambia de sentido. [2]

(b) (i) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad máxima.

(ii) Halle el instante $t < t_2$ en el que la partícula tiene una velocidad mínima. [4]

(c) Halle la distancia que ha recorrido la partícula entre los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$. [2]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

10. [Puntuación máxima: 8]

Ed camina en línea recta desde el punto $\mathrm{P}(-1, 4)$ hasta el punto $\mathrm{Q}(4, 16)$ con velocidad constante.
Ed sale del punto P en el instante $t = 0$ y llega al punto Q en el instante $t = 3$, donde t se mide en horas.
Sabiendo que en el instante t el vector de posición de Ed respecto al origen se puede expresar en la forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$,

(a) halle los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. [3]

Roderick se encuentra en el punto $\mathrm{C}(11, 9)$. Roderick quiere hacerle señas a Ed mientras este va caminando de P a Q. Roderick decide hacer señas cuando Ed pase por el punto más cercano a C.

(b) Halle el instante en el que Roderick hace señas a Ed. [5]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

11. [Puntuación máxima: 18]

Se realiza una encuesta en un edificio de oficinas de gran tamaño. Hallan que el 30% de los oficinistas pesan menos de 62 kg y que el 25% de los oficinistas pesan más de 98 kg. Los pesos de los oficinistas se pueden modelizar con una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

(a) (i) Determine un sistema formado por dos ecuaciones lineales que satisfagan μ y σ.

(ii) Halle el valor de μ y el de σ. [6]

(b) Halle la probabilidad de que un oficinista pese más de 100 kg. [1]

En el edificio hay ascensores que llevan a los oficinistas hasta su oficina.
Sabiendo que en un ascensor dado hay 10 oficinistas,

(c) halle la probabilidad de que haya al menos cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg. [2]

Sabiendo que hay 10 oficinistas en un ascensor y que al menos uno de ellos pesa más de 100 kg,

(d) halle la probabilidad de que haya menos de cuatro oficinistas que pesen más de 100 kg. [3]

La llegada de los ascensores a la planta baja entre las $08{:}00$ y las $09{:}00$ se puede modelizar con una distribución de Poisson. En promedio llega un ascensor cada 36 segundos.

(e) Halle la probabilidad de que en un período cualquiera de media hora, entre las $08{:}00$ y las $09{:}00$, lleguen más de 60 ascensores a la planta baja. [3]

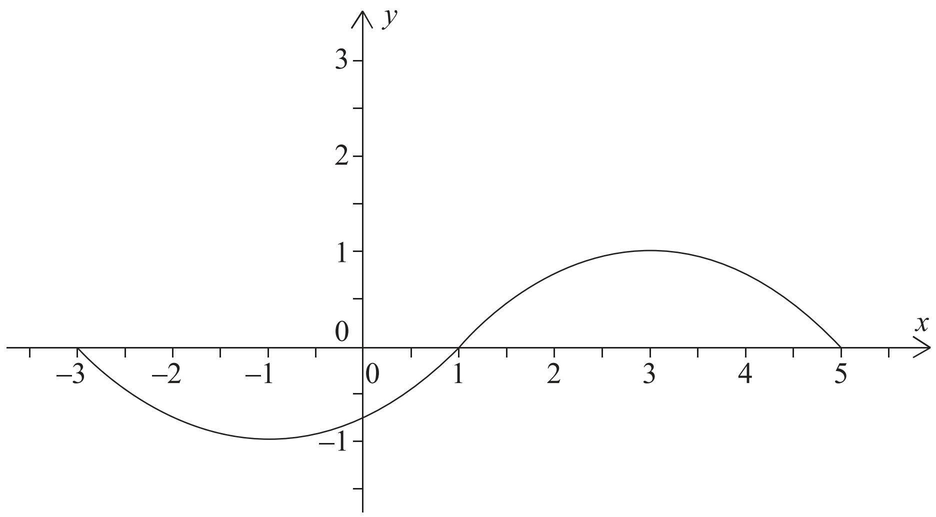
Cada ascensor puede llevar a un máximo de 10 oficinistas. Sabiendo que en un período de media hora llegan 400 oficinistas, independientemente unos de otros,

(f) halle la probabilidad de que haya suficientes ascensores para llevarlos a todos hasta sus oficinas. [3]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 21]

El siguiente gráfico representa una función $y = f(x)$, donde $-3 \le x \le 5$.
La función tiene un máximo en $(3, 1)$ y un mínimo en $(-1, -1)$.



(a) Las funciones u y v vienen dadas por $u(x) = x - 3$, $v(x) = 2x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(i) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ f$.

(ii) Indique cuál es el recorrido de la función $u \circ v \circ f$.

(iii) Halle el mayor dominio posible de la función $f \circ v \circ u$. [7]

(b) (i) Explique por qué la función f no tiene inversa.

(ii) El dominio de f se restringe para así definir una función g que sí que tenga inversa g^{-1}. Indique cuál es el mayor dominio posible de g.

(iii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g^{-1}(x)$, mostrando claramente el punto de corte con el eje y e indicando las coordenadas de los extremos. [6]

Considere la función que viene dada por $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+d}$, $x \ne -d$ y $d \in \mathbb{R}$.

(c) (i) Halle una expresión para la función inversa $h^{-1}(x)$.

(ii) Halle el valor de d para el cual la función h coincide con su inversa.

Para este valor de d, existe una función k tal que $h \circ k(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, $x \ne -1$.

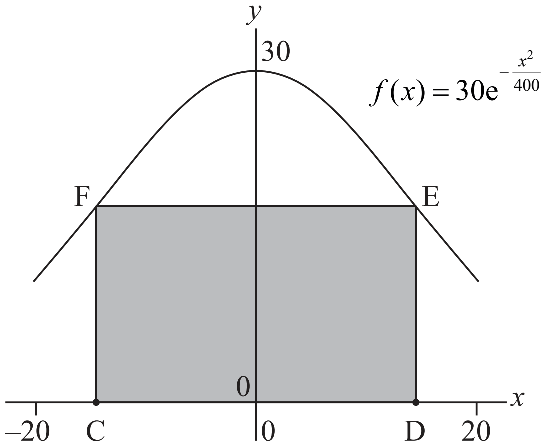
(iii) Halle $k(x)$. [8]

No escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 21]

La siguiente figura muestra la sección transversal vertical de un edificio. La sección transversal del tejado del edificio se puede modelizar mediante la curva $f(x) = 30\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{400}}$, donde $-20 \le x \le 20$.

El eje x representa el nivel de la calle.



(a) Halle $f''(x)$. [4]

(b) Muestre que la pendiente de la función del tejado es máxima para $x = -\sqrt{200}$. [3]

La seccion transveral del espacio habitable que queda bajo el tejado está modelizado por el rectángulo CDEF, con los puntos $\mathrm{C}(-a, 0)$ y $\mathrm{D}(a, 0)$, donde $0 < a \le 20$.

(c) Muestre que el área (A) máxima del rectángulo CDEF es $600\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. [5]

(d) A la función I se la conoce como el factor de aislamiento de CDEF. La función se define como $I(a) = \dfrac{P(a)}{A(a)}$, donde $P =$ perímetro y $A =$ área del rectángulo.

(i) Halle una expresión para P en función de a.

(ii) Halle el valor de a que minimiza I.

(iii) Utilizando el valor de a hallado en el apartado (ii), calcule el porcentaje del área de la sección transversal bajo todo el tejado que no está incluido en la sección transversal del espacio habitable. [9]